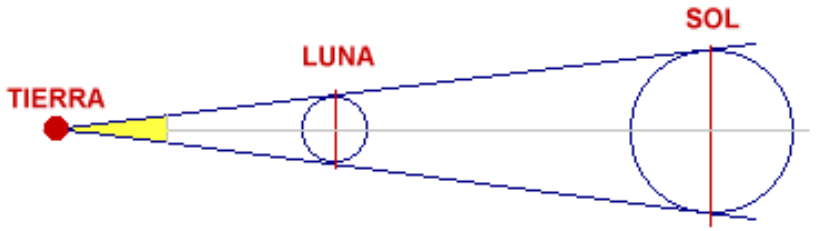
TRIGONOMETRÍA

Francisco González Villarroel

TRIGONOMETRÍA

- La trigonometría es una ciencia que se preocupa de la resolución de triángulos, esta ciencia comenzó
- debido a la necesidad que tenía el hombre para calcular distancias muy grandes, por ejemplo, la
- distancia de la Tierra al Sol o a la Luna o la distancia entre dos puntos muy lejanos en la Tierra.



inacap

ÁNGULO

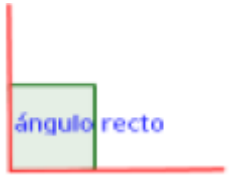
- Un ángulo se forma cuando dos rayos tienen un punto de inicio en común. Este punto se llama el vértice.
- El ángulo queda determinado por la apertura de estos rayos.

TIPOS DE ÁNGULOS

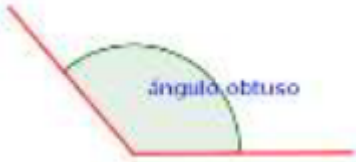
- *Ángulo agudo:* la medición de un ángulo inferior a 90 grados.



- *Ángulo recto:* un ángulo que mide exactamente 90 grados; los dos lados son perpendiculares.



- *Ángulo obtuso:* un ángulo de medición superior a 90 grados y menos de 180 grados.



- *Ángulo llano o extendido:* un ángulo que mide exactamente 180 grados.

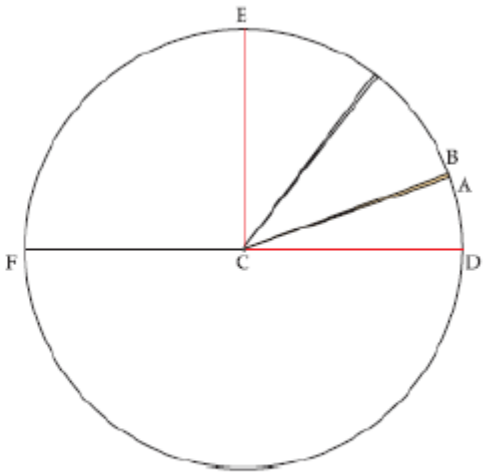


inacap

SISTEMAS Y MEDIDAS ANGULARES

- Para medir ángulos utilizaremos los siguientes sistemas de medición son: el **sistema sexagesimal (Sexagesimal: degree)** y el **sistema circular (Circular: rad)**.

El Sistema Sexagesimal: la unidad de medida es un grado sexagesimal, denotado 1°. Para definirla se considera una circunferencia de centro C que se divide en 360 arcos de la misma longitud, es como tomar la circunferencia como si fuera una torta y sacarle 360 rebanadas iguales (muy delgaditas). Cada uno de estos arcos, junto con el centro C, origina un $\measuredangle ACB$ que mide 1°.



Observación: 1 grado sexagesimal es equivalente a 1 minuto, y a su vez un minuto es equivalente a 60 segundos.

$$1° = 60' \quad \text{y} \quad 1' = 60''$$

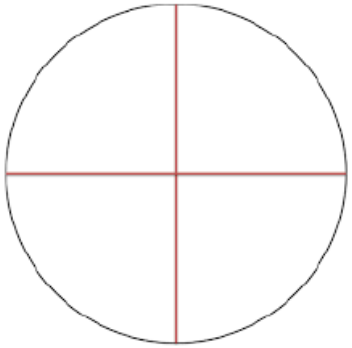
Ejemplo:

Si divides la circunferencia en 4 arcos iguales, ¿cuánto mide cada uno de los ángulos que se forman?

Observa que si dividimos la circunferencia en 4 partes obtenemos:

$$360° : 4 = 90°$$

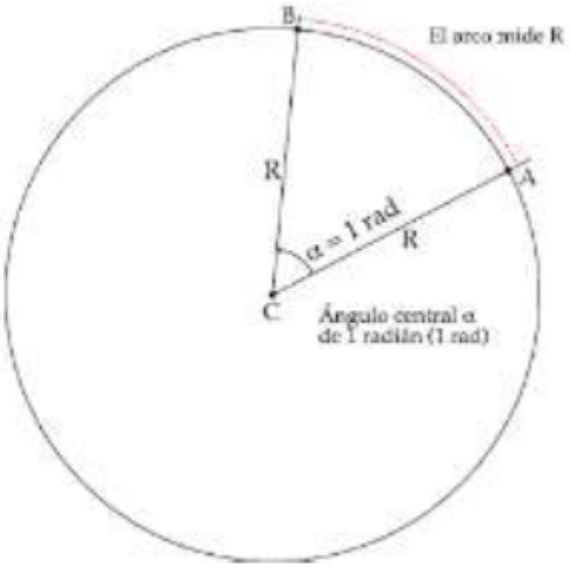
Es decir, cada arco origina un ángulo que mide 90°



SISTEMAS Y MEDIDAS ANGULARES

El Sistema Circular: la unidad de medida es un radián, que es la medida de un $\measuredangle ACB$ de vértice en el centro C de una circunferencia y que subtiende un arco de longitud igual al radio de esta.
Si R es el radio de la circunferencia la longitud de esta es 2π veces el radio y cada radio corresponde a un ángulo del centro de 1 rad. Luego para la totalidad de la circunferencia, se tiene:

$$360° = 2\pi\, rad$$



Ejemplo: Transforma 90° a radianes.

Resolvemos utilizando una cuarta proporcional sabiendo que $360° = 2\pi\, radianes$

$$360° = 2\pi\, radianes$$

$$90° = x\, radianes$$

Ahora resolvemos:

$$x = \frac{90° \times 2\pi\, radianes}{360°} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2} radianes$$

Por lo tanto 90° equivalen a $\frac{\pi}{2}$ radianes

inacap

SISTEMAS Y MEDIDAS ANGULARES

Ejemplo: Transforma $\frac{5\pi}{3}$ radianes a grados

Resolvemos utilizando una cuarta proporcional sabiendo que $360° = 2\pi\ radianes$

$$360° = 2\pi\ radianes$$

$$x° = \frac{5\pi}{3}\ radianes$$

Ahora resolvemos:

$$x = \frac{180° \times \frac{5\pi}{3}\ radianes}{\pi\ radianes} \Rightarrow x = 300°$$

Por lo tanto $\frac{5\pi}{3}$ radianes equivalen a 300°

Inacap

GRADOS, MINUTOS Y SEGUNDOS

Para desglosar una medida en el sistema sexagesimal de grados en forma decimal y calcular los minutos y segundos equivalentes también trabajamos con la cuarta proporcional.

Si quieres saber cuántos minutos, grados y segundos tiene 148,34° desglosamos de la siguiente forma:

Tenemos 148° y queremos saber cuántos minutos y segundos son 0,34°, sabiendo que 1° es equivalente a 60′ (minutos) resolvemos:

$$1° = 60\ minutos$$

$$0{,}34° = x\ minutos$$

Ahora resolvemos:

$$x = \frac{0{,}34° \times 60\ minutos}{1°}$$

$$x = 20{,}4\ minutos$$

Por lo tanto 0,34° equivalen a $20{,}4'$

inacap

GRADOS, MINUTOS Y SEGUNDOS

Luego procedemos de la misma forma para calcular los segundos, desglosamos 20,4 en 20 minutos y 0,4 minutos y transformamos este último en segundos:

$$1' = 60\ segundos$$

$$0{,}4' = x\ segundos$$

Ahora resolvemos:

$$x = \frac{0{,}4' \times 60''}{1'}$$

$$x = 24\ segundos$$

Por lo tanto 148,34° equivalen a 148° 20' y 24''

inacap

GRADOS, MINUTOS Y SEGUNDOS

- Determine cuántos radianes son 30°
- Determine cuántos grados equivale a $\frac{2\pi}{6}$ radianes
- Transforme 85,73° a grados minutos y segundos.

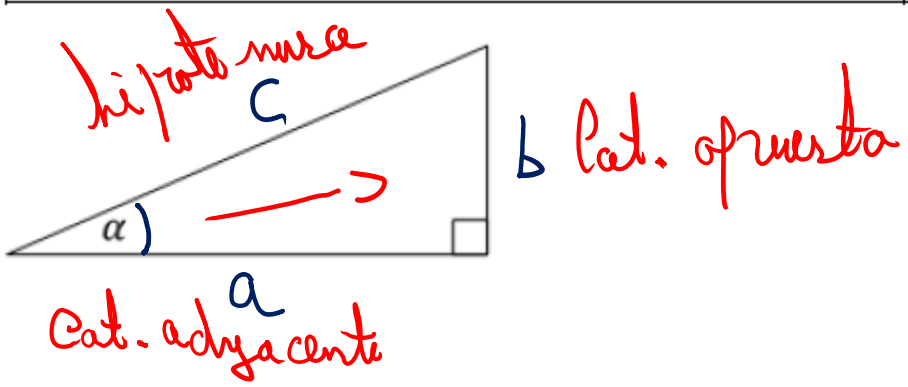
Razones trigonométricas

Una razón trigonométrica es una razón entre las longitudes de dos lados de un ***triángulo rectángulo***.

Son seis razones trigonométricas: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante, las que se abrevian: sen, cos, tan, sec, cotan y csc, respectivamente.

Cada razón trigonométrica tiene asociada una razón recíproca (que corresponde a su inverso multiplicativo), en el siguiente cuadro te mostramos cuales son las recíprocas de cada una:

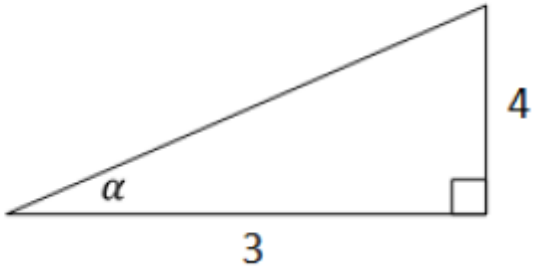
Razón trigonométrica	Razón trigonométrica recíproca
$sen(\alpha) = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$	$csc(\alpha) = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} = \frac{c}{b}$
$cos(\alpha) = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$	$sec(\alpha) = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} = \frac{c}{a}$
$tan(\alpha) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{b}{a}$	$cotan(\alpha) = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} = \frac{a}{b}$



Inacap

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

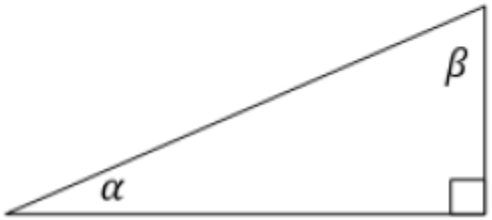
Ejemplo 1: Determina las razones trigonométricas sen, cos y tan para el ángulo α:



Razones trigonométricas

Ejemplo 2: Sabiendo que $\text{sen}(\alpha) = \frac{1}{5}$, calcule el $\cos(\alpha)$

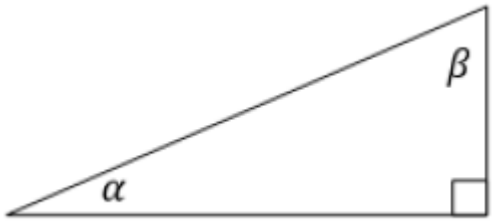
Recuerda que $\text{sen}\,\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$, entonces si dibujamos un triángulo rectángulo, nos están dando las medidas del cateto opuesto y la hipotenusa.



inacap

Razones trigonométricas

- Para cada ángulo determina la relación de coseno, seno, tangente, secante, cosecante y cotangente si $sen\alpha = \frac{3}{5}$.



Razones trigonométricas

Observación:
Las razones trigonométricas también se asocian a funciones de tal forma que x es el ángulo y la función es sen, cos o tan. Más adelante profundizaremos en el concepto de función trigonométrica, sin embargo, para calcular los ángulos a veces necesitarás las funciones trigonométricas inversas llamadas arcoseno, arcocoseno y arcotangente, en tu calculadora las encontrarás como: $sen^{-1}, cos^{-1}, tan^{-1}$

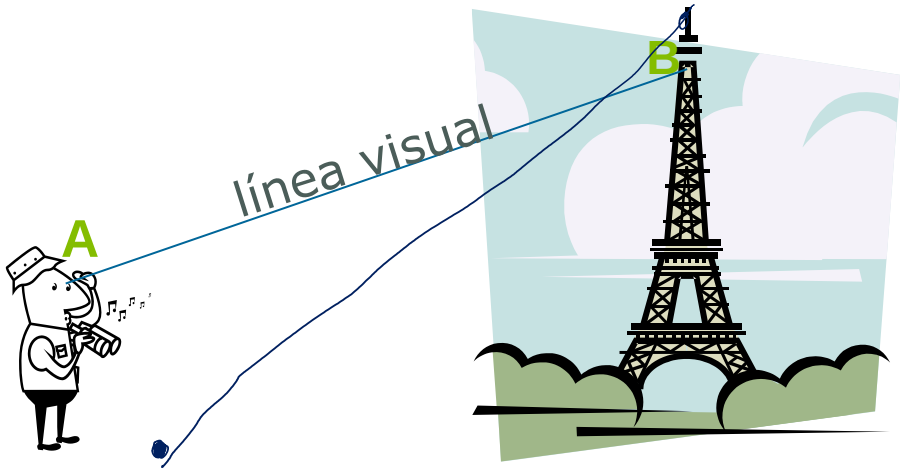
En tu calculadora puedes encontrar estas funciones aplicando (Shift) y estas te permiten determinar un ángulo.

Ejemplo: En el triángulo anterior $\text{sen}(\alpha) = \frac{1}{5}$, por lo tanto $\alpha = sen^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) \rightarrow \alpha \approx 11{,}5°$

Inacap

Ángulo de elevación y depresión

Los ángulos de elevación y de depresión, son los que se forman por la línea visual y la línea horizontal.



En la imagen, **A** observa a **B**

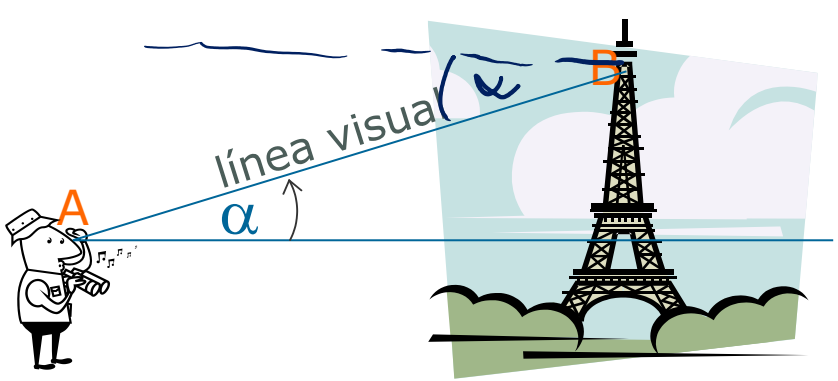
Se llama línea visual (o de visión) a la recta imaginaria que une el ojo de un observador con el lugar observado.

Inacap

Ángulo de elevación y depresión

Ángulo de elevación

Llamamos ángulo de elevación al que forman la horizontal del observador y el lugar observado, cuando éste está situado arriba del observador.

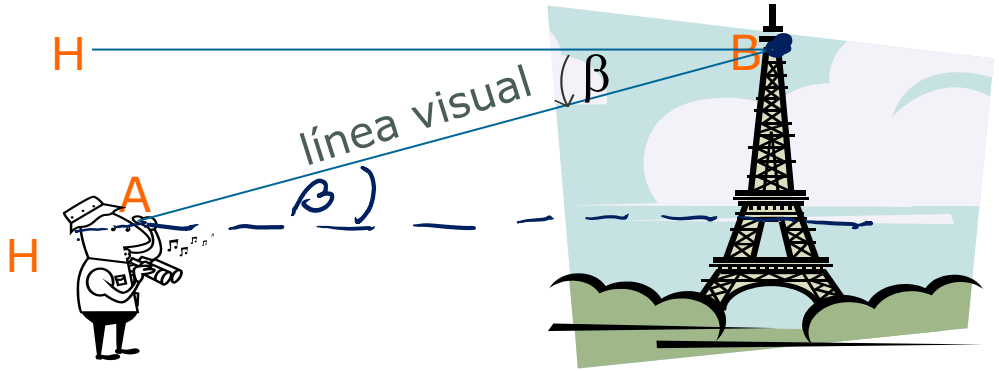


α: ángulo de elevación

H : horizontal del observador

Ángulo de depresión

Cuando el observador está más alto lo llamaremos ángulo de depresión.



β: ángulo de depresión

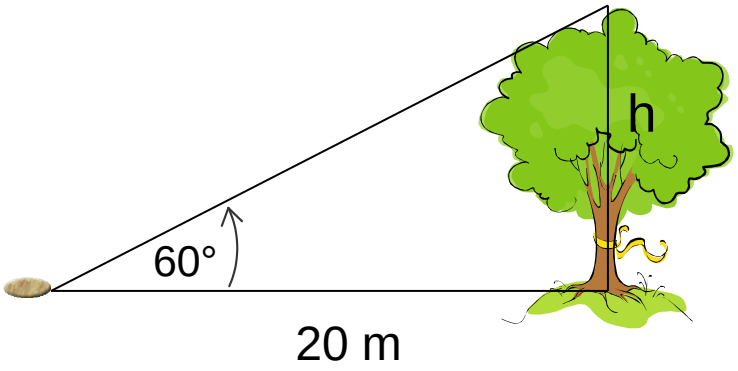
H : horizontal del observador

Inacap

Resolución de problemas con Razones trigonométricas

1. Una piedra que está en el suelo se encuentra a 20 metros de un árbol con un ángulo de elevación de 60°. ¿Cuál es la altura del árbol?

El árbol es perpendicular al suelo, entonces su dibujo es:



Los datos corresponden a los catetos del triángulo rectángulo y la razón trigonométrica que los relaciona es la tangente, entonces:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\text{tg } 60° = \frac{h}{20}$$

Pero la tg $60° = \sqrt{3}$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{20}$$

$$\Rightarrow 20\sqrt{3} = h$$

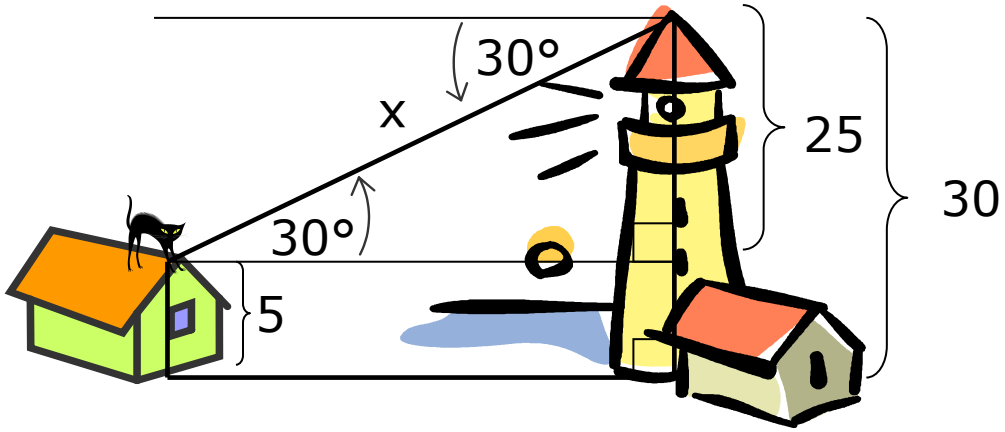
Por lo tanto, la altura del árbol es $20\sqrt{3}$ m.

Inacap

Resolución de problemas con Razones trigonométricas

2. Una persona se encuentra en la parte superior de un faro de 30 metros de altura y observa un gato que se encuentra en el techo de una casa de 5 metros de altura, con un ángulo de depresión de 30º. ¿Cuál es la distancia entre el gato y la persona?

Al realizar el dibujo tenemos:



Los datos que se tienen corresponden al cateto opuesto y a la hipotenusa, del triángulo rectángulo formado. La razón trigonométrica que los relaciona es el seno, entonces:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\Rightarrow \text{sen } 30° = \frac{25}{x}$$

$$\text{Pero sen } 30° = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{25}{x}$$

$$\Rightarrow x = 50$$

Por lo tanto, la distancia entre el gato y la persona es 50 metros.

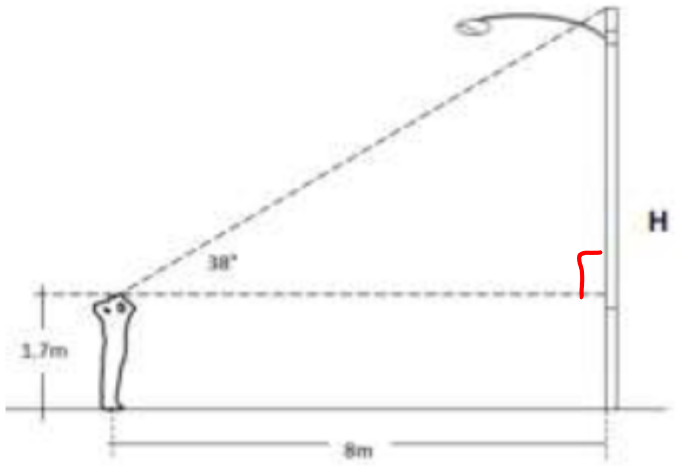
Inacap

Resolución de problemas con Razones trigonométricas

Analicemos el siguiente problema y como resolverlo paso a paso:

Una persona que mide 1.7 m de altura vé con un ángulo de elevación de 38° la punta de un poste, sabiendo que la persona se e encuentra a una distancia de 8 m desde el pie del poste. Calcula la altura del poste de luz.

Incluso puedes hacer un dibujo de la situación si esto te ayuda a organizar los datos:



Inacap

Resolución de problemas con Razones trigonométricas

Al observar la parte superior de una torre, el ángulo de elevación es 53°, medido a 36m de ella, y a una altura de 12m sobre el suelo. Hallar la altura de la torre.

Resolución de problemas con Razones trigonométricas

- La longitud de un cable que tiene sus extremos fijos en un poste y en la tierra, es de $20\sqrt{3}$ metros. El cable forma un ángulo de 60° con la tierra. ¿A cuántos metros de la tierra está fijo el cable en el poste?

Inacap

Resolución de problemas con Razones trigonométricas

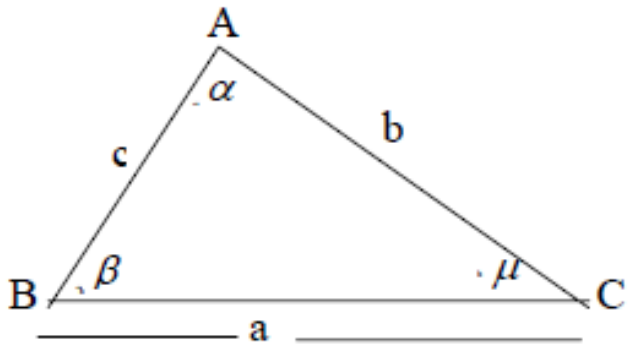
- Un ratón observa a un águila en la copa de un árbol con un ángulo de elevación de 80°. Si la distancia del ratón al árbol es de 12 metros, ¿cuál es la distancia entre el águila y el ratón?

TEOREMA DEL SENO Y EL COSENO

Ley de Senos.

En todo ΔABC, de lados a, b, y c, siempre se cumple que:

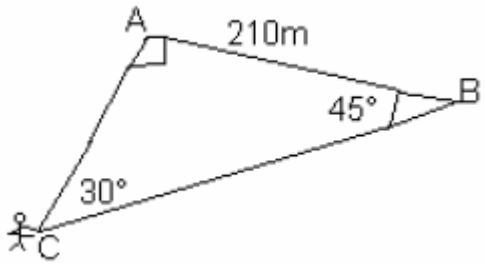
$$\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)} = \frac{c}{sen(\mu)}$$



Donde α, β y μ son los ángulos correspondientes a los lados a, b y c respectivamente, (como muestra la figura),

Ejemplo.

Un niño se encuentra volando dos cometas simultáneamente, en un momento determinado, la distancia entre las dos cometas es de 210 metro, Cuanta pita se ha liberado para la primera cometa en ese momento, si el ángulo formado por las pitas es de 30° y el ángulo formado por la pita de la segunda cometa y la línea que une las dos cometas es de 45°?



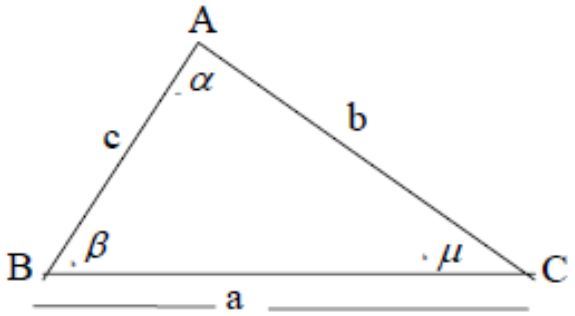
inacap

TEOREMA DEL SENO Y EL COSENO

Ley de Cosenos.

En todo ΔABC, de lados **a**, **b**, y **c**, siempre se cumple que:

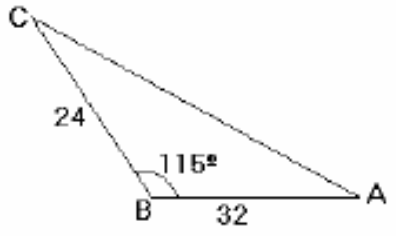
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\mu)$$



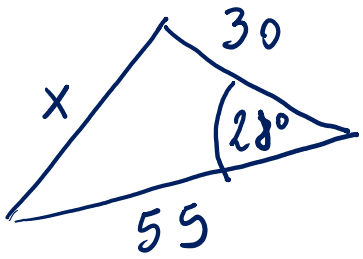
Donde α, β y μ son los ángulos correspondientes a los lados a, b y c respectivamente, (como muestra la figura),

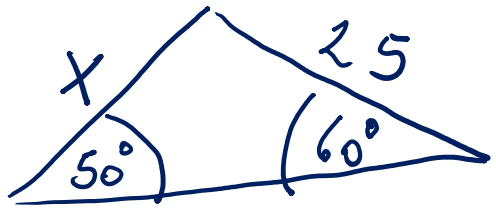
Ejemplo

Dado el triángulo ABC en la figura de la derecha, encuentre la longitud del segmento AC.



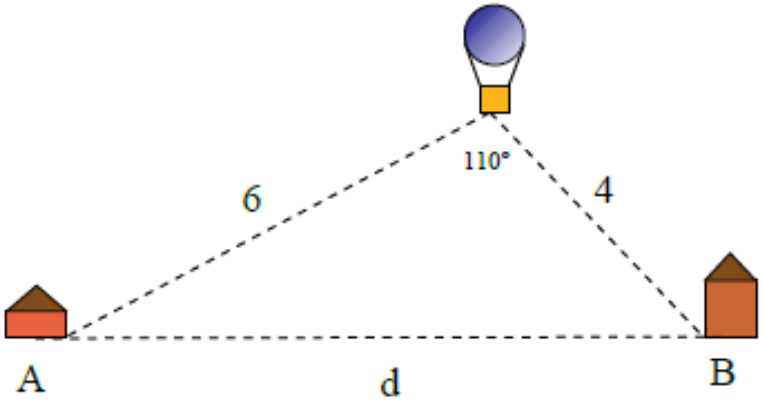
Teorema del seno y el coseno





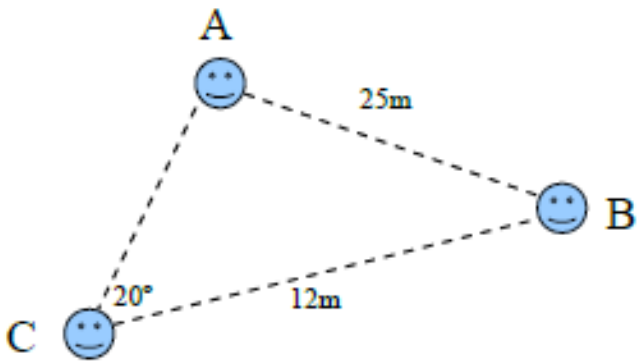
TEOREMA DEL SENO Y EL COSENO

Desde lo alto de un globo se observa un pueblo A con un ángulo de 50°, y otro B, situado al otro lado y en línea recta, con un ángulo de 60°. Sabiendo que el globo se encuentra a una distancia de 6 kilómetros del pueblo A y a 4 del pueblo B, calcula la distancia entre los pueblos A y B.



TEOREMA DEL SENO Y EL COSENO

Tres amigos se sitúan en un campo de fútbol. Entre Alberto y Berto hay 25 metros, y entre Berto y Camilo, 12 metros. El ángulo formado en la esquina de Camilo es de 20°. Calcula la distancia entre Alberto y Camilo.



Función seno y coseno

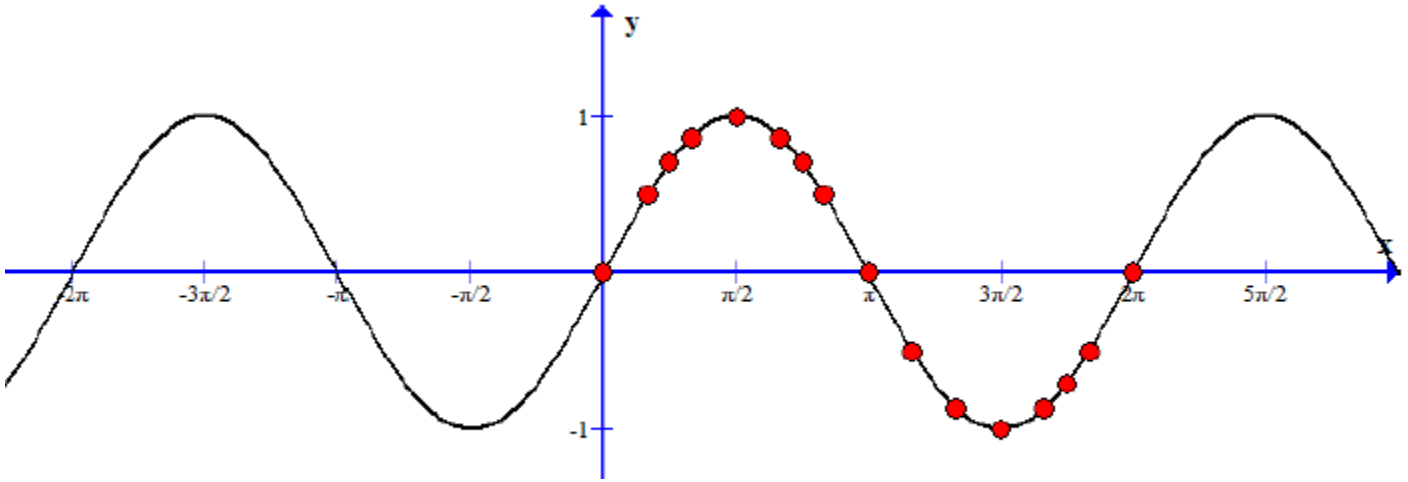
- Las funciones seno y coseno tienen como dominio el valor de un ángulo que puede tomar cualquier valor en el conjunto de los números reales y por imagen tendrá también un valor real.

- Para graficar estas funciones realizaremos una tabla de valores, con las preimágenes de la función, es decir los valores de x (ángulos), y las imágenes de la función, es decir los valores de y ó $f(x)$.

FUNCIÓN SENO

$$f(x) = sen(x)$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0



Observa:

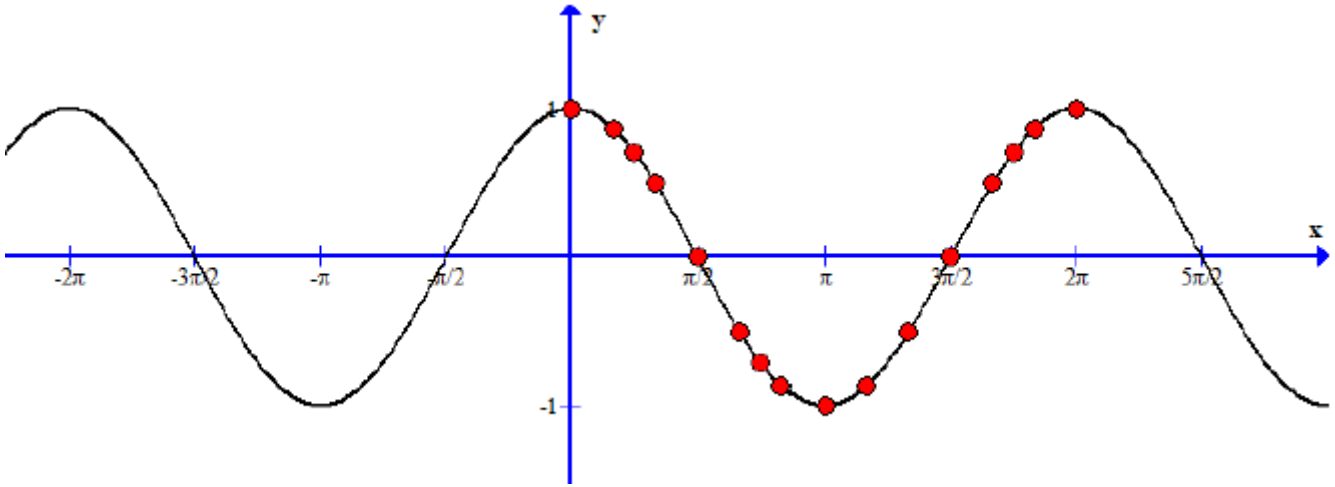
- Las imágenes de la función $f(x) = sen(x)$ están en el intervalo [-1,1]
- El máximo de la función se alcanza cuando $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$
- El mínimo de la función se alcanza cuando $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$
- Los ceros de la función se obtienen cuando $x = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$
- La gráfica de la función es periódica, se repite cada $x = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$
- La función seno es una función impar, lo que quiere decir que su gráfica no se altera luego de una rotación de 180 grados alrededor del origen.

inacap

Función coseno

$$f(x) = cos(x)$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$f(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Observa:

- Las imágenes de la función $f(x) = cos(x)$ están en el intervalo [-1,1]
- El máximo de la función se alcanza cuando $x = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$
- El mínimo de la función se alcanza cuando $x = \pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$
- Los ceros de la función se obtienen cuando $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$
- La gráfica de la función es periódica, se repite cada $x = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$
- La función coseno es par (es simétrica con respecto al eje y) lo que quiere decir que su gráfica no se altera luego de una reflexión sobre el eje y.

inacap

Amplitud de las funciones seno y coseno

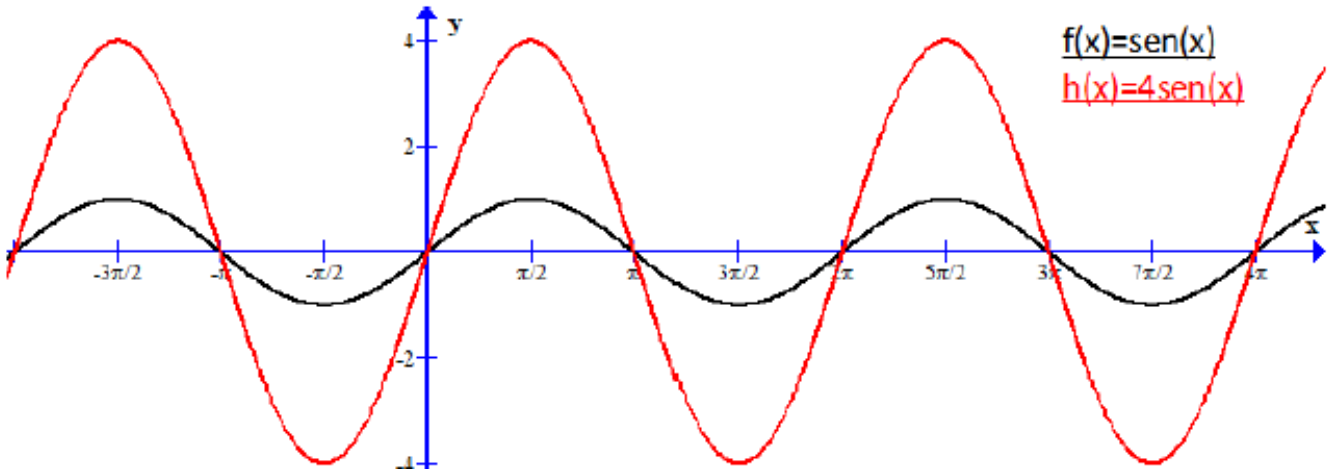
La amplitud es la distancia vertical entre la línea media y uno de los puntos extremos, pero ¿qué es la línea media?, es la recta horizontal de la forma: $y = c, c \in \mathbb{R}$, que pasa en medio de los puntos máximos y mínimos de la gráfica.

Entonces, la amplitud la podemos calcular de la siguiente forma:

$$\frac{valor\ máximo - valor\ mínimo}{2}$$

Ejemplo:

La siguiente gráfica muestra la función $f(x) = sen(x)$ y $h(x) = 4sen(x)$



La amplitud de estas funciones es 1 y 4 respectivamente

Inacap

Periodo de las funciones seno y coseno

Las funciones trigonométricas son periódicas, es decir cada cierto tramo se repiten.

El periodo es la distancia que hay entre dos puntos máximos o mínimos consecutivos, gráficamente el periodo nos muestra cada cuántos grados (o radianes) se repiten las funciones seno y coseno.

Para las funciones $f(x) = sen(bx)$ y $h(x) = cos(bx)$ se define como:

$$periodo = \frac{2\pi}{|b|}$$

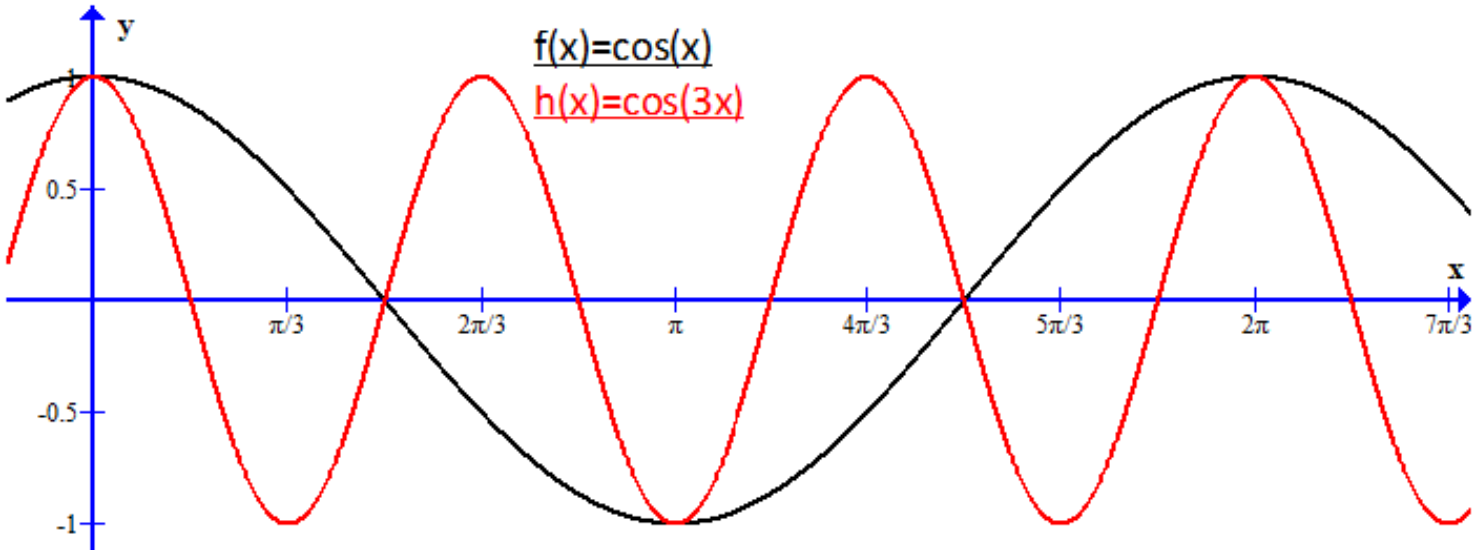
Entonces la función $sen(x)$ y $cos(x)$ tienen periodo: $\frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$, es decir cada 2π ó cada 360° se repiten.

inacap

Periodo de las funciones seno y coseno

Ejemplo:

Para la función $h(x) = cos(3x)$ que se muestra en la gráfica a continuación junto a la función $f(x) = cos(x)$, su periodo será: $\frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$ a diferencia de la función $f(x)$ cuyo periodo es 2π.



inacap

TRASLACIONES DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

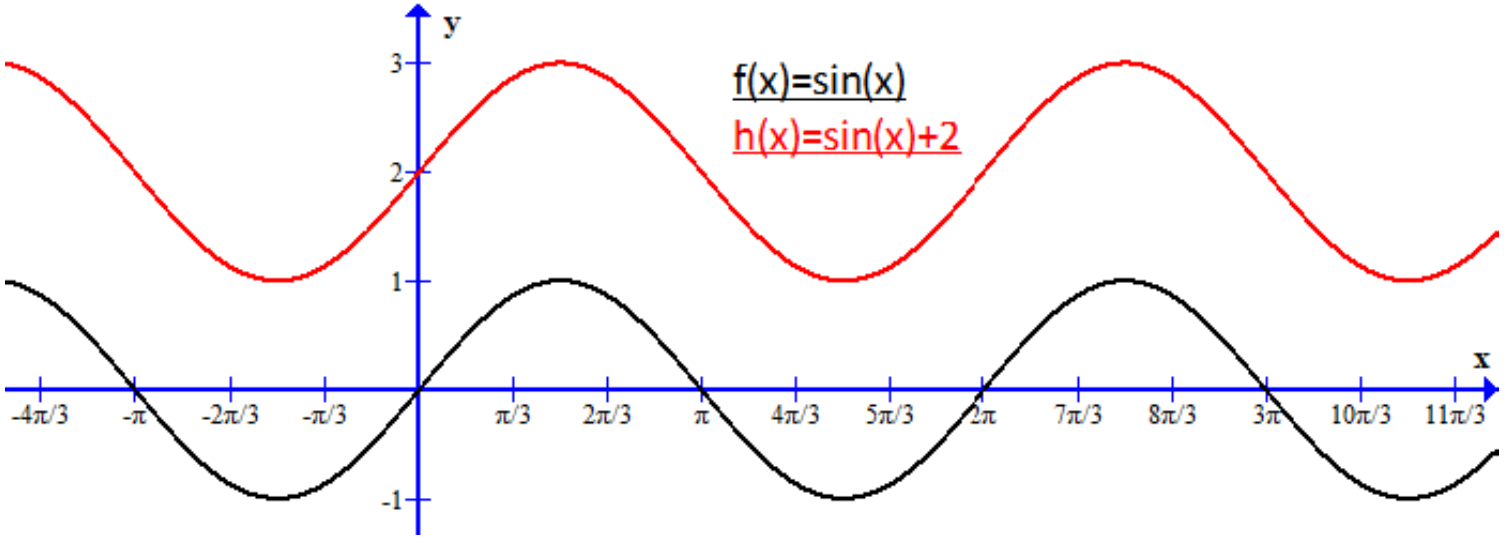
Dadas las funciones: $f(x) = A \cdot sen(Bx - C) + D$ ó $g(x) = A \cdot cos(Bx - C) + D$, con A, B, C y D coeficientes que pertenecen al conjunto de los números reales.

Las traslaciones en el *eje y* están determinadas por el coeficiente D:

- Si $D > 0$, la gráfica se desplazara D unidades hacia arriba respecto de la función $f(x) = sen(x)$
- Si $D < 0$, la gráfica se desplazara D unidades hacia abajo respecto de la función $f(x) = sen(x)$.

Ejemplo:

En la función $h(x) = sen(x) + 2$ al compararla con la función $f(x) = sen(x)$, puedes observar que es la misma curva, es decir no se ha deformado: su periodo y amplitud son los mismos, pero se ha trasladado dos unidades hacia arriba.



Inacap

TRASLACIONES DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

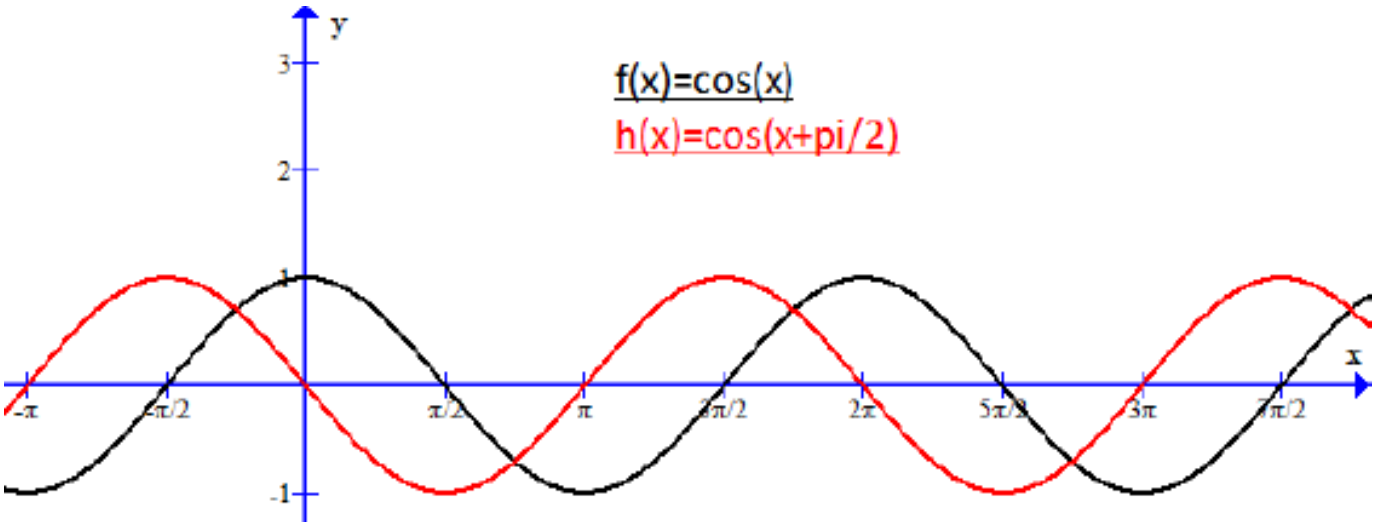
Las traslaciones en el *eje* x (también llamadas cambio de fase) están determinadas por el valor de C:

- Si $C > 0$, la gráfica se desplazara $\frac{C}{B}$ unidades hacia la derecha respecto de la función respecto de la función $f(x) = sen(x)$
- Si $C < 0$, la gráfica se desplazara $\frac{C}{B}$ unidades hacia la izquierda respecto de la función respecto de la función $f(x) = sen(x)$

Ejemplo 1:

- En la función $h(x) = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ al compararla con la función $f(x) = cos(x)$, puedes observar que es la misma curva, es decir no se ha deformado: su periodo y amplitud son los mismos, pero se ha trasladado $\frac{\pi}{2}$ unidades hacia la izquierda.

Nota: Observa que C es negativo ya que $x - -\frac{\pi}{2} = x + \frac{\pi}{2}$



Inacap

Resumen de las deformaciones y traslaciones de las funciones seno y coseno

De acuerdo con lo que hemos desarrollado respecto del periodo, amplitud, cambios de fase (traslaciones en el eje x) y traslaciones en el eje y, resumiremos:

$$f(x) = A \cdot sen(Bx - C) + D$$

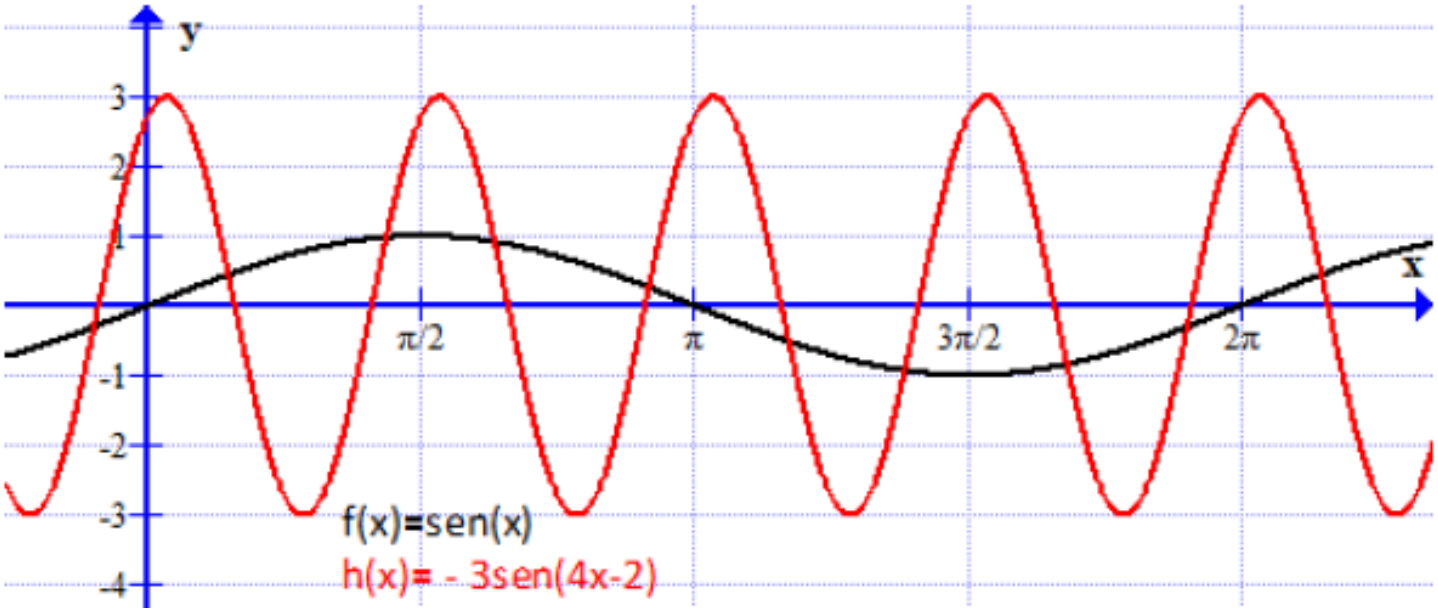
$$h(x) = A \cdot cos(Bx - C) + D$$

1) En ambas funciones los parámetros A, B, C, D afectan de la misma forma a la gráfica.
2) La amplitud es: $|A|$
3) Si A es negativo se produce una reflexión de la gráfica, respecto de su línea media.
4) El periodo se calcula: $\frac{2\pi}{B}$
5) La traslación en el eje y depende del valor de D
6) El desfase (traslación en el eje x) se calcula: $\frac{C}{B}$
7) No debemos olvidar que si C es negativo la expresión $(Bx - C)$ se verá de la forma: $(Bx + C)$ y la gráfica se trasladará hacia la izquierda.

Inacap

EJEMPLO DE LAS DEFORMACIONES Y TRASLACIONES DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

En la función $h(x) = -3sen(4x - 2)$ al compararla con la función $f(x) = sen(x)$, puedes observar que no es la misma curva, se ha deformado: su periodo es $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ esto quiere decir que cada $\frac{\pi}{2}$ (1,6 unidades aproximadamente) se completa una onda, su amplitud es de 3 unidades, pero como la amplitud va acompañada de un signo negativo significa que la onda se invierte (se produce una simetría respecto del eje x) , además se ha trasladado $\frac{C}{B} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ unidades hacia la derecha.



Ejemplo de las deformaciones y traslaciones de las funciones seno y coseno

$f(x) = 3 \cdot sen(8x - 9) - 1$

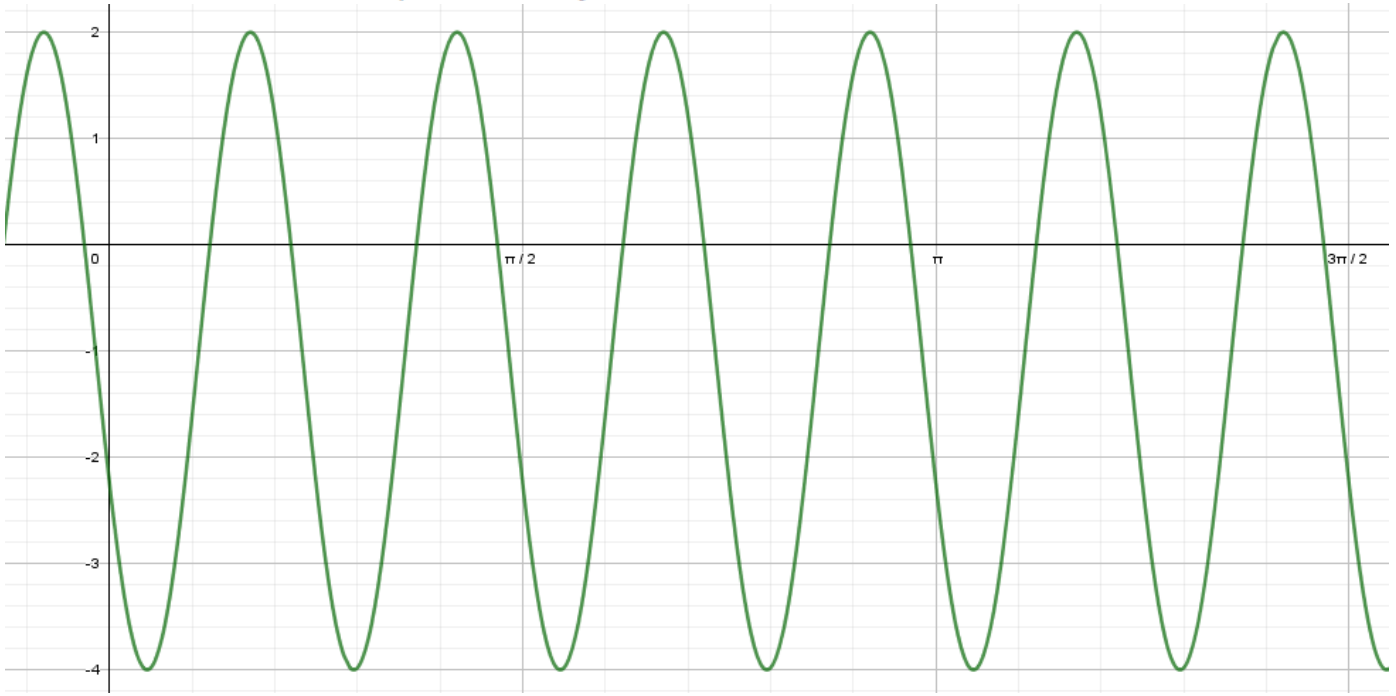
a) Los factores son: $A = 3, B = 8, C = 9$ y $D = -1$

b) La amplitud es: $|A| = |3| = 3\ unidades$, esto quiere decir que desde el valor máximo al mínimo hay una distancia total de 6 unidades.

c) El periodo se calcula: $\frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$, esto quiere decir que una onda se completa en un giro de 45° o $\frac{\pi}{4}\ radianes$

d) La traslación en el eje y es: D = -1, esto quiere decir que la onda se traslada una unidad hacia abajo en el eje y.

e) El desfase (traslación en el eje x) se calcula: $\frac{C}{B} = \frac{9}{8}$ unidades, esto quiere decir que la onda se traslada 9/8 unidades hacia el lado positivo del eje x.



Inacap

Ejemplo de las deformaciones y traslaciones de las funciones seno y coseno

$\rightarrow f(x) = -2\cos(3x + 5) + 3$

